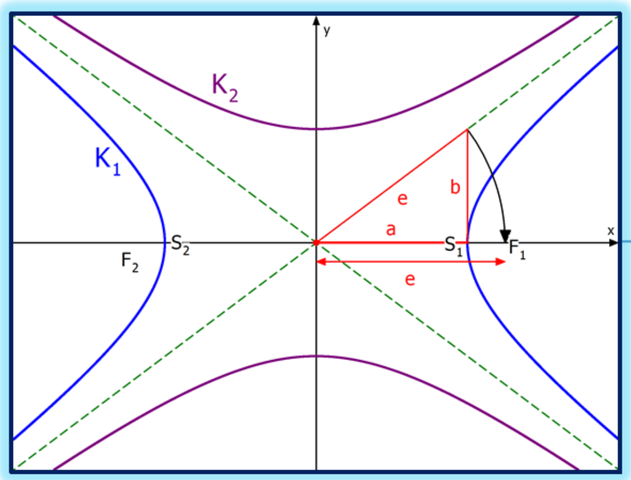



# Hyperbeln

Text Nr. 54070

Stand 29. Mai 2016

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

DEMO

# Vorwort

Um 1980 herum waren Hyperbeln und Ellipsen als sogenannte Kegelschnitte noch Unterrichts- und Prüfungsstoff. Dieser wurden dann abgelöst von der Vektorrechnung.

Heute kennen Schüler nur noch die Hyperbeln, die zur Gleichung $y = \frac{1}{x}$ oder komplizierteren Gleichung wie $y = \frac{2x+4}{x-1}$ gehören. Diese werden im Bereich Analysis, also bei gebrochen rationalen Funktionen untersucht. In vielen Bundesländern wurden diese Funktionen inzwischen auch aus den Prüfungen verbannt, der Zeitmangel im G8 ist einer der Gründe.

In diesem Text jedoch fallen alle diese Fesseln, und ich berichte über Hyperbeln als algebraische Kurven 2. Ordnung.

Da dieser Stoff jedoch sehr umfangreich ist, gibt es einen zusätzlichen Text im Ordner „2 Analytische Geometrie“ unter der Nummer **24001**.
**Dort findet man dann auch Konstruktionen und ausführliche Aufgaben zu Tangenten.**

Hier beschränke ich mich auf wesentliche Einblicke, wie es auch bei den anderen etwa 20 Kurven dieses Ordners geschieht

DEMO

# Inhalt

# 1 Vorschau: Hyperbeln in x-Richtung

**Geometrische Definition:**

Eine Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, für die der Betrag der Differenz der Abstände zu zwei sogenannten Brennpunkten konstant ist.
Diese Konstante bezeichnet man in der Regel (günstigerweise) mit 2a.

Liegen diese Brennpunkte symmetrisch zum Ursprung auf der x-Achse, etwa $F_1(e\,|\,0)$, $F_2(-e\,|\,0)$. dann erhält man eine sogenannte **Ursprungshyperbel** (bzw. 1. Hauptlage).

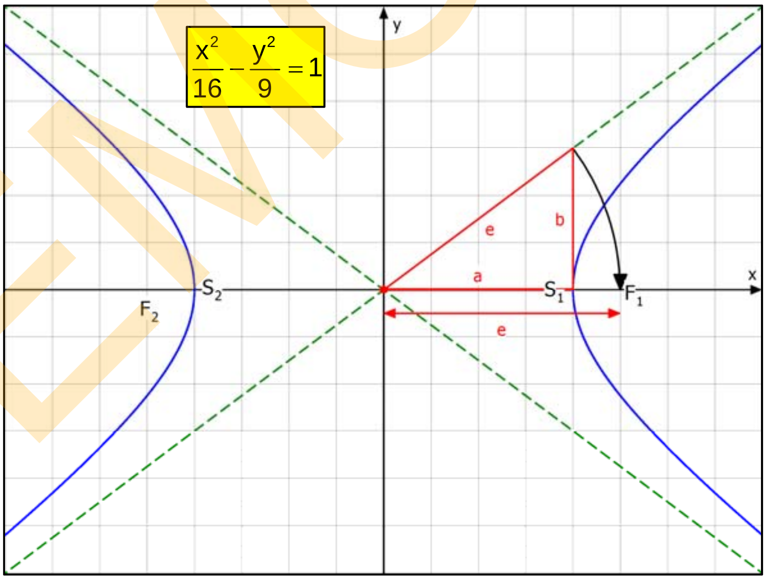
Ihre **Koordinatengleichung** ist $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ bzw. $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

Sie hat zwei schräge Asymptoten: $y=\pm\frac{b}{a}x$

Zu ihr gehören zwei Ersatzfunktionen: $y=\pm b\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}$

Der Zusammenhang zwischen a, b und der „Brennweite“ e ist: $e=\sqrt{a^2+b^2}$

Abb.: a = 4, b = 3.




Weitere Kenngrößen für Hyperbeln sind die **numerische Exzentrizität:**

$$\varepsilon=\frac{e}{a}$$

**Für Hyperbeln gilt stets** $\varepsilon>1$-

Und der sogenannte Parameter p:

$$p=\frac{b^2}{a}$$

Liegt der Kurvenmittelpunkt statt im Ursprung im Punkt $M(x_M\,|\,y_M)$, dann lautet die

Koordinatengleichung: $\frac{(x-x_M)^2}{a^2}-\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$

## Parametergleichungen: (Siehe Abschnitt 2.2)

$$x(t)=\frac{a}{\cos(t)} \quad \text{und} \quad y(t)=\pm b\cdot\tan(t)$$

für $t\in\,]0;2\pi[$ aber $t\neq\frac{1}{2}\pi$ und $t\neq\frac{3}{2}\pi$

oder $x(t)=\pm a\cdot\cosh(t)$ und $y=b\cdot\sinh(t)$

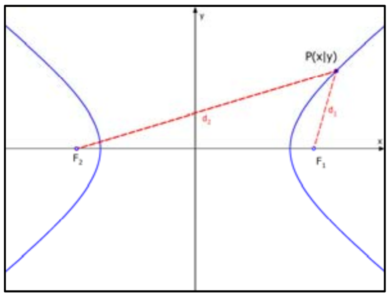
*sinh und cosh sind Hyperbelfunktionen.*

oder $x(t)=\pm a\frac{t^2+1}{2t}$ und $y(t)=b\cdot\frac{t^2-1}{2t}$

# 2 Details zu den Gleichungsarten

## 2.1 Herleitung der Koordinatengleichung (Mittelpunktsform)

**Geometrische Definition:**




> Eine Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, für die der Betrag der Differenz der Abstände zu zwei sogenannten Brennpunkten konstant ist (= 2a).

Wir gehen aus vom beliebigen Kurvenpunkt $P(x\,|\,y)$
und den beiden Brennpunkten $F_1(e\,|\,0)$ und $F_2(-e\,|\,0)$:

1. Abstand: $\overline{PF_1} = \sqrt{(x-e)^2 + (y-0)^2}$

2. Abstand: $\overline{PF_2} = \sqrt{(x+e)^2 + (y-0)^2}$

Bedingung: $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$ bzw. $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \pm 2a$

d. h. $\sqrt{(x-e)^2 + y^2} - \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = \pm 2a$

Isolieren der 1. Wurzel: $\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$

Quadrieren: $(x-e)^2 + \cancel{y^2} = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + (x+e)^2 + \cancel{y^2}$

$$\cancel{x^2} - 2ex + \cancel{e^2} = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \cancel{x^2} + 2ex + \cancel{e^2}$$

Isolieren der Wurzel: $-4ex - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x+e)^2 + y^2}$ $\quad | :4$

$$-ex - a^2 = \pm a\sqrt{(x+e)^2 + y^2}$$

Quadrieren: $\left(ex + a^2\right)^2 = a^2\left[(x+e)^2 + y^2\right]$ denn $(-u-v)^2 = (u+v)^2$

$$e^2x^2 + \cancel{2ex\cdot a^2} + a^4 = a^2x^2 + \cancel{2ex\cdot a^2} + a^2e^2 + a^2y^2$$

Günstig umformen: $e^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2e^2 + a^2y^2$

$$\left(e^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(e^2 - a^2\right)$$

Ersetzen: $e^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow e^2 - a^2 = b^2$:

$$b^2x^2 - a^3y^2 = a^2b^2 \qquad | : a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

DEMO

## 2.2 Bestätigung der Parametergleichungen: $x(t)=\frac{a}{\cos(t)}$ und $y(t)=\pm b\cdot\tan(t)$

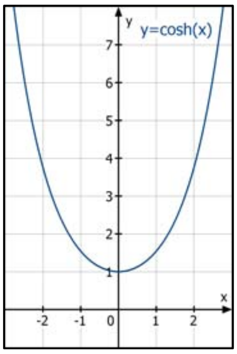
Man berechnet: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2}{a^2\cdot\cos^2(t)}-\frac{b^2\cdot\tan^2(t)}{b^2}=\frac{1}{\cos^2(t)}-\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}=\frac{1-\sin^2(t)}{\cos^2(t)}=\frac{\cos^2(t)}{\cos^2(t)}=1$

Die durch diese Parametergleichungen berechenbaren Punkte liegen auf der Ursprungshyperbel.

## Bestätigung der Parametergleichungen: $x(t)=\pm a\cdot\cosh(t)$ und $y=b\cdot\sinh(t)$

Hier muss man wissen, dass für diese hyperbolischen Funktionen gilt:

$$\cosh^2(t)-\sinh^2(t)=1$$




Man rechnet daher $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\cosh^2(t)-\sinh^2(t)=1$

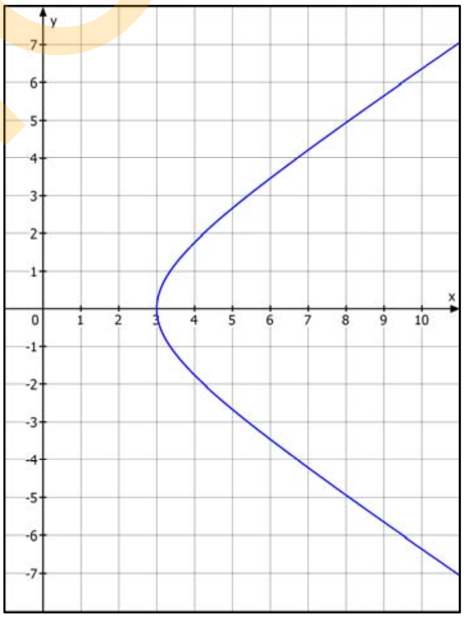
Ergebnis: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ Hyperbel um den Ursprung.

**Beispiel:** $x(t)=3\cdot\cosh(t)$ und $y(t)=2\cdot\sinh(t)$ für $t\in\mathbb{R}$

Es folgt $\cosh(t)=\frac{x}{3}$ und $\sinh(t)=\frac{y}{2}$.

Eingesetzt in $\cosh^2(t)-\sinh^2(t)=1$

Erhält man $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$



Das ist die Gleichung einer **Hyperbel**.
Zur Kurve gehört nur der rechte Ast der Hyperbel, denn die Funktion cosh hat nur Werte $\geq 1$, also liefert diese Formel keine negativen x-Werte.
Um diese zu erhalten benötigt man $x(t)=-3\cdot\cosh(t)$
(Siehe die Gleichungen in der 1. Zeile.)

## Bestätigung der Parametergleichungen:

$x(t)=\pm a\frac{t^2+1}{2t}$ und $y(t)=b\cdot\frac{t^2-1}{2t}$

Berechnung von :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2\cdot(t^2+1)^2}{a^2\cdot 4t^2}-\frac{b^2\cdot(t^2-1)^2}{b^2\cdot 4t^2}=\frac{(t^2+1)^2}{4t^2}-\frac{(t^2-1)^2}{4t^2}=\frac{t^4+2t^2+1-(t^4-2t^2+1)}{4t^2}=\frac{4t^2}{4t^2}=1$$

## 2.3 Hyperbelgleichungen mit Polarkoordinaten:

**(1)** $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cdot\cos(\varphi)}$ bzw. $r = \dfrac{\frac{b^2}{a}}{1+\frac{e}{a}\cdot\cos(\varphi)} \Leftrightarrow r = \dfrac{b^2}{a+e\cdot\cos(\varphi)}$

**Bei dieser Gleichung liegt der Ursprung im linken Brennpunkt**

*Die Lage dieser Hyperbel kann man wie folgt untersuchen:*

$\varphi = 0$ ergibt $r == \dfrac{b^2}{a+e}$ Daraus folgt: $x = r\cdot\cos(\varphi) = \dfrac{b^2}{a+e}\cdot\cos(0) = \dfrac{b^2}{a+e}$

$y = r\cdot\sin(\varphi) = \dfrac{b^2}{a+e}\cdot\sin(0) = \dfrac{b^2}{a+e}\cdot 0 = 0$

Das führt zum Punkt $S_1\left(\dfrac{b^2}{a+e}\,|\,0\right)$

$\varphi = \pi\ \left(\text{bzw. } 180^\circ\right)$: $r = \dfrac{b^2}{a-e}$ Daraus folgt: $x = r\cdot\cos(\varphi) = \dfrac{b^2}{a-e}\cdot\cos(\pi) = -\dfrac{b^2}{a-e}$

$y = r\cdot\sin(\varphi) = \dfrac{b^2}{a-e}\cdot\sin(\pi) = \dfrac{b^2}{a-e}\cdot 0 = 0$

Das führt zum Punkt $S_2\left(-\dfrac{b^2}{a-e}\,|\,0\right)$

Für den Mittelpunkt von $S_1$ und $S_1$ gilt

$$x_M = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b^2}{a+e}+\frac{-b^2}{a-e}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2(a-e)-b^2(a+e)}{a^2-e^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-2b^2e}{-b^2} = e$$

Also hat die Hyperbel den Mittelpunkt $M(e\,|\,0)$.

Der Abstand des Ursprungs von M ist also e, und damit liegt der Ursprung im linken Brennpunkt: $F_2(0\,|\,0)$ - siehe Abbildung unten.

Für den rechten Brennpunkt gilt $x = x_M + e = 2e$: $F_1(2e\,|\,0)$

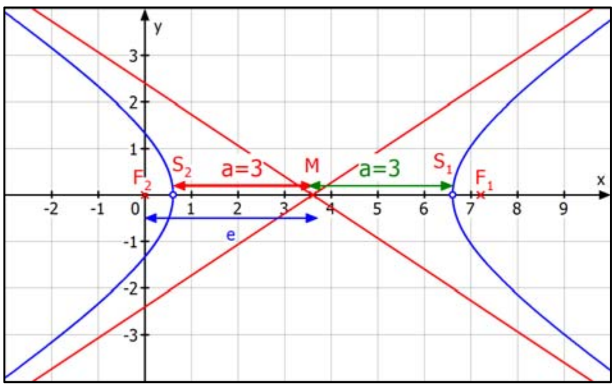
Die Asymptoten haben die Steigung $m = \pm\dfrac{b}{a}$ und gehen durch M, daher besitzen sie diese

Gleichungen: $y - 0 = \pm\dfrac{b}{a}(x-e) \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{b}{a}x \mp \dfrac{be}{a}$

**Beispiel:** Es sei a = 3 und b = 2, dann folgt $e = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{13}$

$\varepsilon = \dfrac{e}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$ und $p = \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{4}{3}$

Daraus folgt: $r = \dfrac{4}{3+\sqrt{13}\cdot\cos(\varphi)}$




Die beiden Scheitel berechnet man wie oben:

$S_1\left(\dfrac{4}{3+\sqrt{13}}\,|\,0\right) \approx (0{,}6\,|\,0)$, $S_2\left(\dfrac{4}{3-\sqrt{13}}\,|\,0\right) \approx (5{,}6\,|\,0)$

Es folgt $M\left(\sqrt{13}\,|\,0\right)$, $F_1\left(2\sqrt{13}\,|\,0\right)$, $F_2(0\,|\,0)$

Koordinatengleichung: $\dfrac{\left(x-\sqrt{13}\right)^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Asymptoten: $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\sqrt{13}$, $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\sqrt{13}$

DEMO

**(2)** $r = \frac{p}{1-\varepsilon\cdot\cos(\varphi)}$ bzw. $r = \frac{\frac{b^2}{a}}{1-\frac{e}{a}\cdot\cos(\varphi)} \Leftrightarrow r = \frac{b^2}{a-e\cdot\cos(\varphi)}$

**Bei dieser Gleichung liegt der Ursprung im rechten Brennpunkt**

***Die Lage dieser Hyperbel kann man wie folgt untersuchen:***

$\varphi = 0$ ergibt $r == \frac{b^2}{a-e}$ Daraus folgt: $x = r\cdot\cos(\varphi) = \frac{b^2}{a-e}\cdot\cos(0) = \frac{b^2}{a-e}$

$y = r\cdot\sin(\varphi) = \frac{b^2}{a-e}\cdot\sin(0) = 0$

Das führt zum Punkt $S_1\left(\frac{b^2}{a-e}\,|\,0\right)$

$\varphi = \pi$ $\left(\text{bzw. } 180^\circ\right)$: $r = \frac{b^2}{a+e}$ Daraus folgt: $x = r\cdot\cos(\varphi) = \frac{b^2}{a+e}\cdot\cos(\pi) = -\frac{b^2}{a+e}$

$y = r\cdot\sin(\varphi) = \frac{b^2}{a+e}\cdot\sin(\pi) == 0$

Das führt zum Punkt $S_2\left(-\frac{b^2}{a+e}\,|\,0\right)$

Für den Mittelpunkt von $S_1$ und $S_1$ gilt

$$x_M = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b^2}{a-e}+\frac{-b^2}{a+e}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2(a+e)-b^2(a-e)}{a^2-e^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2b^2e}{-b^2} = -e$$

Also hat die Hyperbel den Mittelpunkt $M(-e\,|\,0)$.

Der Abstand des Ursprungs von M ist also e, und damit liegt der Ursprung im rechten Brennpunkt: $F_1(0\,|\,0)$

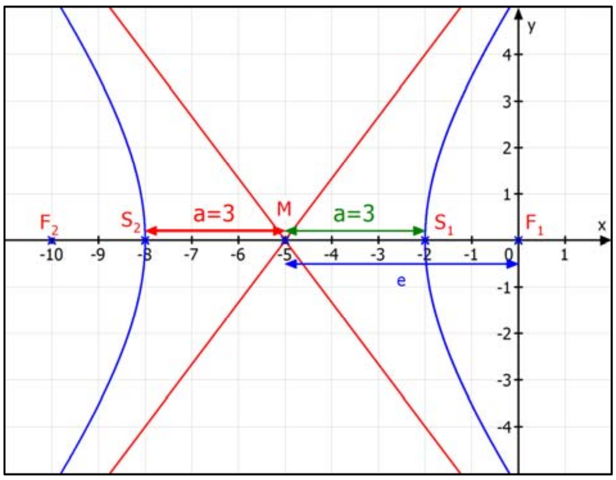
Für den linken Brennpunkt gilt $x = x_M - e = -2e$: $F_2(-2e\,|\,0)$

Die Asymptoten haben die Steigung $m = \pm\frac{b}{a}$ und gehen durch M, daher besitzen sie diese

Gleichungen: $y - 0 = \pm\frac{b}{a}(x+e) \Leftrightarrow y = \pm\frac{b}{a}x \pm \frac{be}{a}$

**Beispiel:** Es sei a = 3 und b = 4, dann folgt $e = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{25} = 5$

Daraus folgt: $r = \frac{16}{3+5\cdot\cos(\varphi)}$




Die beiden Scheitel berechnet man wie oben:

$S_1(-8\,|\,0)$, $S_2(-2\,|\,0)$

Es folgt $M(-5\,|\,0)$, $F_1(0\,|\,0), F_2(-10\,|\,0)$

Koordinatengleichung: $\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Asymptoten:

$y - 0 = \frac{4}{3}(x+5) \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{20}{3}$

und $y = -\frac{4}{3}x - \frac{20}{3}$

DEMO

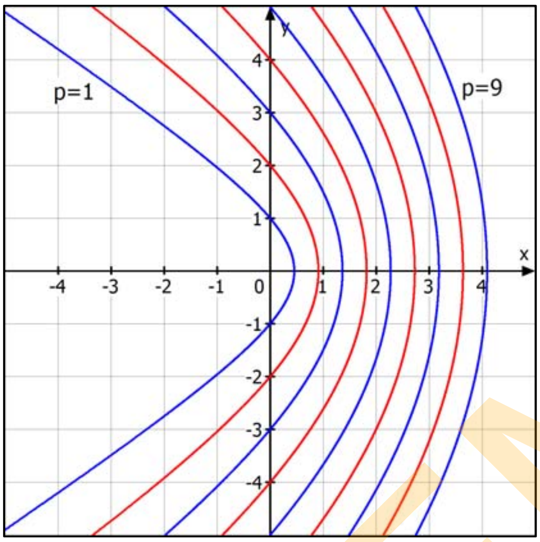
## Die Abhängigkeit der Lage und Form der Hyperbel von den Größen p und $\varepsilon$ kann man durch Darstellung von Hyperbelscharen mit MatheGrafix sehr schön erkennen.

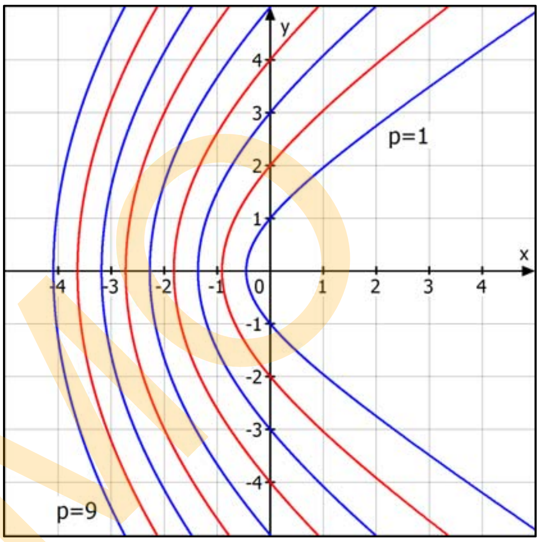
Zuerst Hyperbeln mit $r = \dfrac{p}{1+\varepsilon \cdot \cos(\varphi)}$. bzw. $r = \dfrac{p}{1-\varepsilon \cdot \cos(\varphi)}$

Die Abbildungen zeigen **Hyperbelscharen für variables p**.

Die verwendeten Werte für p gehen von 1 bis 9. Alle Kurven haben $\varepsilon = 1{,}2$ .

*Ich zeige jeweils nur den Hyperbelast, der sich um den Ursprung „windet".*
*Siehe dazu die Abbildungen auf den Seiten 4 und 5.*




Man erkennt, dass bei wachsendem p die Hyperbel flacher bzw. weiter geöffnet wird.

(3) Die seltsame Form der **Scheitelgleichungen** lautet

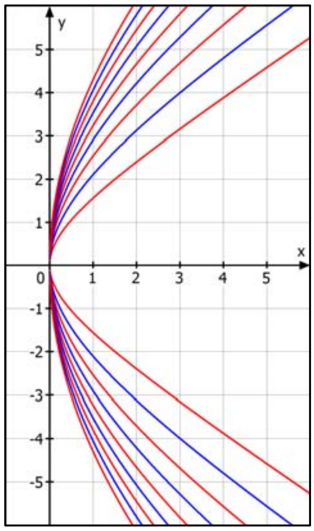
$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1) \cdot x^2$ mit $p = \dfrac{b^2}{a}$ und $\varepsilon = \dfrac{e}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

(Für $\varepsilon > 1$ ergibt diese Gleichung eine Hyperbel.)

kann man in einer Abbildung verdeutlichen:

Hier liegt der rechte Hyperbelscheitel im Ursprung.

Die Abb. zeigt eine Hyperbelschar für p von 1 bis 9 und $\varepsilon = 1{,}2$




DEMO